

**Cálculo Diferencial – Tecnologia em Mecatrônica – Aula 3**

**LIMITES LATERAIS**

Se  $x$  se aproxima de  $a$  através de valores maiores que  $a$  ( ou pela direita ), escrevemos :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

Limite lateral à **direita** de  $a$ .

Se  $x$  se aproxima de  $a$  através de valores menores que  $a$  ( ou pela esquerda ), escrevemos :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$

Limite lateral à **esquerda** de  $a$ .

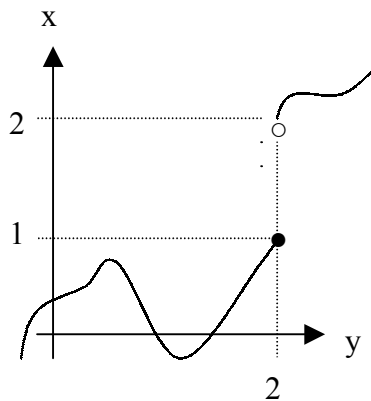
O limite de  $f(x)$  para  $x \rightarrow a$  existe se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \text{ portanto, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

do contrário,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq b$  então **não existe**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Exemplos :**

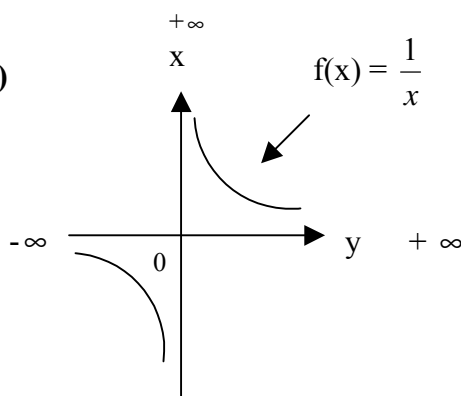
1)



$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \\ \therefore \text{NÃO EXISTE} \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \end{array} \right.$$

**Alguns limites envolvendo o infinito**

1)



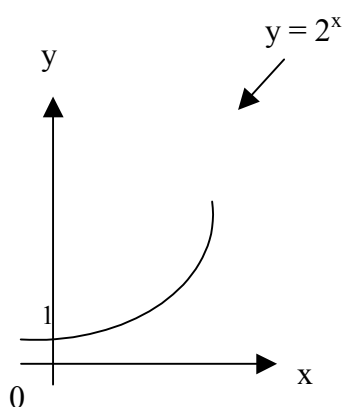
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , ou seja, à medida que  $x$  aumenta,  $y$  tende para zero e o **limite é zero**.

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ , ou seja, à medida que  $x$  diminui,  $y$  tende para zero e o **limite é zero**.

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ , ou seja, à medida que  $x$  se aproxima de zero **pela direita** de zero ( $x \rightarrow 0^+$ ),  $y$  tende para **mais infinito (positivo)** que é o **limite**.

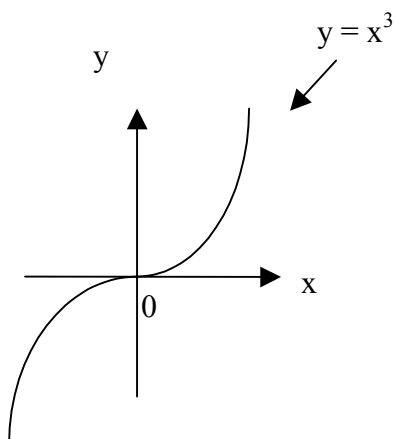
d)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ , ou seja, à medida que  $x$  se aproxima de zero **pela esquerda** de zero ( $x \rightarrow 0^-$ ),  $y$  tende para **menos infinito (negativo)** que é o **limite**.

2)



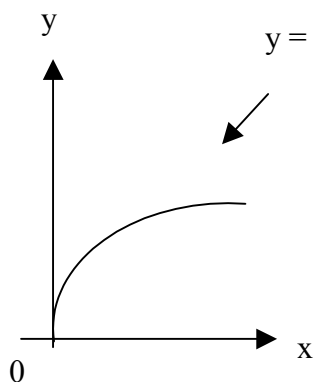
$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0 \end{array} \right.$$

3)



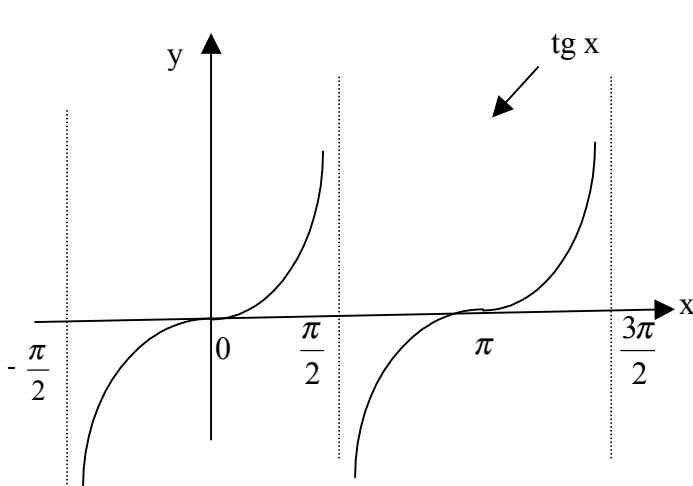
$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \end{array} \right.$$

4)



$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = +\infty$$

5)



$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \text{tg } x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \text{tg } x = +\infty$$

### Limite de uma função polinomial para $x \rightarrow \pm\infty$

Seja a função polinomial  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , então :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

Analogamente para  $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^n}$$

**Exemplos :**

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 4x^2 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^4 + x - 1}{x^3 + x^2 + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^4}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty.$$


---



---

**Exercícios :**

Calcule :

$$1) \lim_{x \rightarrow 3^+} (1 + \sqrt{x-3})$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x}{x-2} \right)$$

3)

$$f(x) \begin{cases} x^2 + 3; x \geq 1 \\ 5x - 1; x < 1 \end{cases} \quad ; \text{ calcule :}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

4)

$$f(x) \begin{cases} x+1; x \geq 2 \\ 2x; 0 \leq x < 2 \\ x^2; x < 0 \end{cases} \quad ; \text{ calculate :}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\text{5) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3 + 4x^2 - 1}{3x^4 + 2x - 2} \right)$$

$$\text{6) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^4 + x + 3}{3x^4 + x^3 - 1} \right)$$

$$\text{7) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^4 + 2x - 1}}{2x^2 - 1} \right)$$

$$\text{8) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3}$$

$$\text{9) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x}$$

$$\text{10) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{x-2} \right)$$

$$\text{11) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 + x}{x^2} \right)$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x} \right)$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{\sqrt{2x^2+1}} \right)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x}}}{\sqrt{4x^2 - 3}} \right)$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 3_+} \left( \frac{4x^2 + 1}{|x-3|} \right)$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{|x-2|}{x-2} \right)$$

---

---

---

---